0.1 Homotopy colimit

C を model category としたとき、colim , lim : $C^D \longrightarrow C$ は weak equivalence を保たない。では colim に似た形で weak equivalence を保つような fanctor は考えられないか。その候補としては Total derived fanctor $\mathbf{L}(\mathrm{colim})$, $\mathbf{R}(\mathrm{lim})$ である。だが、これは構造が複雑すぎる。derived fanctor を知るには object である X の (co)fibrant replacement である QX , RX が何かを知る必要がある。だが factorization によって得られるはずのそれらは、例え cofibrantly generated のようなものでも small object argement はかなり複雑である。ゆえにもう少し安易なものを考えたい。そのためには colim : $C^D \longrightarrow C$ を次のように考える。

Definition 0.1.1

C を category とする。$f, g \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ に対し、f と g の coequalizer とは、$h \in \mathrm{Hom}_C(Y, Z)$ で次の条件を満たすものである。

1. $h \circ f = h \circ g$
2. $h' \in \mathrm{Hom}_C(Y, W)$ が $h' \circ f = h' \circ g$ を満たすとき、$^{\exists_1} i \in \mathrm{Hom}_C(Z, W)$ s.t $h' = i \circ h$

このとき、

$$X \rightrightarrows^f_g Y \xrightarrow{h} Z$$

とかく。2) の条件により、f と g の 2 つの coequalizer$h \in \mathrm{Hom}_C(Y, Z)$, $h' \in \mathrm{Hom}_C(Y, Z')$ が存在した場合、$Z \cong Z'$ である。

Remmark 0.1.2

small category である D と、category である C と $F : D \longrightarrow C$ に対し、colim$F \in C$ とは、coequalizer

$$\coprod_{f:\alpha \longrightarrow \beta} F(\alpha) \rightrightarrows^{\varphi}_{\chi} \coprod_{\alpha \in D} F(\alpha) \longrightarrow \mathrm{colim} F$$

である。ただし φ, χ は各 $f : \alpha \longrightarrow \beta$ の成分に制限すれば、φ は $F(f)$ であり χ は恒等射である。

Definition 0.1.3

D を small category とする。このとき、simplicial set

$$N_*(D) : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

を次のように定義する。$n = \{0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n\}$ を small category とする。

$$N_p(D) = \mathrm{Func}(p, D) = \{D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_p \mid D_j \in \mathrm{ob}(D) \ , \ 0 \leqq j \leqq p \ \}$$

この $D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_n$ を D の長さ n の nerve と呼ぶ。また morphism の対応は、$\varphi : [p] \longrightarrow [q]$ に対し、$N_*(D)(\varphi) = \varphi^* : N_q(D) = \mathrm{Func}(q, D) \longrightarrow \mathrm{Func}(p, D) = N_p(D)$ で定義する。このとき、この幾何学的実現 $|N_*D|$ を D の分類空間と呼び、BD などと書く。

分類空間、というより幾何学的実現を求めるのはかなり面倒なことである。それでも基本的なものはいくつか抑えておいたほうがいい。

Example 0.1.4

object が１つで morphism が恒等射のみの category である $D = \{\phi\}$ を考える。このとき、$N_*(D) = \{\phi \longrightarrow \phi\} = *$ であり、$|N_*(D)| = \coprod_{n \geqq 0} \Delta^n \times */\sim$ であるが、ここで、同値関係を考えると、任意の $x \in \Delta^n$ に対し、$\varphi : [n] \longrightarrow [0]$ と $0 \in \Delta^0$ を考えれば、

$$(0, *) = (\varphi_*(x), *) \sim (x, \varphi^*(*)) = (x, *)$$

なので、$|N_*(D)|$ は一点空間である。

Example 0.1.5

$D = n = \{0 \longrightarrow 1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n\}$ を考える。このとき、恒等射を含まない長さ p の nerve は

$$N_p(D) = \begin{cases} p = \{0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow p\} & p \leqq n \\ \phi & p > n \end{cases}$$

しかない。恒等射を含んだ nerve については、Example 0.1.4 を考えれば、幾何学的実現を取ったときに、それより低い次数の部分と同一されるので除外しておく。よって、

$$BD = \coprod_{0 \leqq p \leqq n} \Delta^p \times p/\sim$$

となる。このとき、inclusion である $\varphi : [p-1] \longrightarrow [p]$ を考えれば、$s \in \Delta^{p-1}$ に対し $(\varphi_*(s), p) \sim (s, p-1)$ であるので、Δ^{p-1}はΔ^n へ埋め込まれる。よって、$BD = \Delta^n$

Definition 0.1.6

small category である D と、**TOP** で $F : D \longrightarrow$ **TOP** に対し、F の homotpy colimit とは、coequalizer

$$\coprod_{f:\alpha\longrightarrow\beta} F(\alpha)\times B(\beta\downarrow D) \rightrightarrows^{\varphi}_{\chi} \coprod_{\alpha\in D} F(\alpha)\times B(\alpha\downarrow D) \longrightarrow \mathrm{hocolim}F$$

である。ただし、φ,χ は各 $f:\alpha\longrightarrow\beta$ の成分に制限すると、

$$\varphi|_{F(\alpha)\times B(\beta\downarrow D)} = F(f)\times 1\ ,\ \chi|_{F(\alpha)\times B(\beta\downarrow D)} = 1\times B(f^*)$$

である。

coequalizer による定義は simple なのだが、その具体的構成は別に考えなければならない。

Definition 0.1.7

small category である D と、$F : D \longrightarrow$ **TOP** に対し、simplicial space

$$B_*F : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbf{TOP}$$

を以下のように構成する。まず、

$$s_p : N_pD \longrightarrow \mathrm{ob}(D)$$

を、$s_p(D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_p) = D_0$ と定義する。つまり、nerve の start object を対応させる。このとき、$B_p(F) = \displaystyle\coprod_{f\in N_pD} F(s_p(f))$ と定義する。また morphism 対応は、$\varphi : [p] \longrightarrow [q]$ に対し、

$$B_pF = \coprod_{f\in N_pD} F(s_p(f)) = \coprod_{\alpha\in\mathrm{ob}(D)}\left(\coprod_{\alpha=s_p(f)\ ,\ f\in N_pD} F(\alpha)\right) = \coprod_{\alpha\in\mathrm{ob}(D)}\big(F(\alpha)\times s_p^{-1}(\alpha)\big)$$

ただし、$s_p^{-1}(\alpha)$ は離散空間と考える。つまり、α から start する nerve の分だけ $F(\alpha)$ を集め、さらに α を動かして得られる直和空間である。よって、

$$\coprod_{\alpha\in\mathrm{ob}(D)}(F(\alpha)\times s_q^{-1}(\alpha)) \xrightarrow{s_*^{-1}(\varphi)} \coprod_{\alpha\in\mathrm{ob}(D)}\left(F(\alpha)\times\left(\coprod_{f\in s_q^{-1}(\alpha),s_p(\varphi^*(f))=\beta} s_p^{-1}(\beta)\right)\right)$$

を考え、さらに

$$\coprod_{\alpha \in \mathrm{ob}(D)} \left(F(\alpha) \times \left(\coprod_{f \in s_q^{-1}(\alpha), s_p(\varphi^*(f))=\beta} s_p^{-1}(\beta) \right) \right) \xrightarrow{\chi} \coprod_{\beta \in \mathrm{ob}(D)} (F(\beta) \times s_q^{-1}(\beta))$$

を次のように定義する。$f \in s_q^{-1}(\alpha), s_p(\varphi^*(f)) = \beta$ であるので、

$$f : \alpha = D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_q$$

としたとき、

$$\varphi^*(f) : \beta = D_{\varphi(0)} \longrightarrow D_{\varphi(1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_{\varphi(p)}$$

であるが、$\varphi(0) \in \{0, 1, \cdots, q\}$ であるので、

$$\alpha = D_0 \longrightarrow D_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_{\varphi(0)} = \beta$$

の列が構成できる。この $\alpha \longrightarrow \beta$ から、$F(\alpha) \longrightarrow F(\beta)$ を考え、それと $s_p(\beta)$ 上の inclusion との直積により、χ を定義する。よって、$\varphi^* : B_qF \longrightarrow B_pF$ はこの 2 つの morphism の合成により定義する。

これにより、$B_*F = \{B_pF\}$ は simplicial space となる。これを F の simplicial replacement と呼ぶ。

Theorem 0.1.8

small category である D と、$F : D \longrightarrow \mathbf{TOP}$ に対し、

$$\mathrm{hocolim} F \cong |B_*F|$$

である。

Example 0.1.9

$D = \{a \xleftarrow{f} b \xrightarrow{g} c\}$ と $F : D \longrightarrow \mathbf{TOP}$ に対し、

$$B_pF = \coprod_{f \in N_p(D)} F(s_p(f)) = \begin{cases} \phi & p \geqq 2 \\ F(b) \coprod F(b) & p = 1 \\ F(a) \coprod F(b) \coprod F(c) & p = 0 \end{cases}$$

であり（ただし、$p > 0$ では恒等射を含むことを許していない）

$$\mathrm{hocolim} F = \left(\Delta^0 \times F(a) \coprod \Delta^0 \times F(b) \coprod \Delta^0 \times F(c) \coprod \Delta^1 \times F(b) \coprod \Delta^1 \times F(b) \right) / \sim$$

であり、同値関係を詳しく見てみよう。$\varphi_0, \varphi_1 : [0] \longrightarrow [1]$ と $\varphi : [1] \longrightarrow [0]$ の 3 つの morphism について見ればよい。ただし、$\varphi_0 : 0 \mapsto 0$ で、$\varphi_1 : 0 \mapsto 1$ とする。

まず φ_0 について、$* \in \Delta^0$ と $x \in B_1F$ に対し、$(\varphi_{0*}(*), x) \sim (*, \varphi_0^*(x))$ という同値関係だが、

$$\varphi_0^* : B_1F = F(b) \coprod F(b) \longrightarrow B_0F = F(a) \coprod F(b) \coprod F(c)$$

が一体なんなのかを調べる。思い起こすと

$$F(b) \coprod F(b) = F(b) \times \{f, g\} \longrightarrow F(b) \times s_0^{-1}(b) \longrightarrow F(b) \hookrightarrow F(a) \coprod F(b) \coprod F(c)$$

であったがこれは最後の inclusion を除き、fold map(projection) である。よって、$(\varphi_{0*}(*), x) \sim (*, \varphi_0^*(x))$ は結局、$(0, x) \sim (*, x)$ である。これは、$B_1F = F(b)_1 \coprod F(b)_2$ と別に考えたとき、$x_1 \in F(b)_1$, $x_2 \in F(b)_2$, $x_1 = x_2$ のとき、$(0, x_1) \sim (0, x_2)$ ということで、$F(b)_1 \times \Delta^1 \coprod F(b)_2 \times \Delta^1$ において、$F(b)_1 \times \{0\}$ と $F(b)_2 \times \{0\}$ が張り付いている。

以下面倒なので結果だけ。φ_1 を考えれば、$F(b)_1 \times \{1\}$ と $F(a) \times \Delta^0 = F(a)$ が $F(g)$ によって、また $F(b)_2 \times \{1\}$ と $F(c) \times \Delta^0 = F(c)$ が $F(f)$ によって貼り付けられていることが分かる。

最後に φ についてだが、これは $F(b) \times \Delta^0$ が $F(b) \times \Delta^1$ の中に埋め込まれることが分かる。

以上の情報を総合すると、

$$\mathrm{hocolim} F = \left(F(b) \times I \coprod F(a) \coprod F(b) \right) / (1, x) \sim F(g)(x), (0, x) \sim F(f)(x)$$

これは $F(f), F(g)$ による Double mapping cylinder に他ならない。

Remmark 0.1.10

homotopy push out で考えた次の 2 つの push out diagram を考える。

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[d, "\simeq"'] & S^{n-1} \arrow[l, hook'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "="'] & D^n \arrow[d, "\simeq"] \\
* & S^{n-1} \arrow[l] \arrow[r] & *
\end{tikzcd}$$

F を上の横列、G を下の横列とすれば、$\mathrm{colim}F \ncong \mathrm{colim}G$ であった。しかし、

$$\mathrm{hocolim}F = S^{n-1} \times I \coprod D_n \coprod D^n/(x,0) \sim x, (x,1) \sim x \cong S^n$$

であり、

$$\mathrm{hocolim}G = S^{n-1} \times I \coprod * \coprod */(x,0) \sim *, (x,1) \sim * \cong S^n$$

であるので、$\mathrm{hocolim}F \cong \mathrm{hocolim}G$ であるのがわかる。

つまり、$\mathrm{hocolim} : C^D \longrightarrow C$ は weak equivalence を保ってくれる。